

'Input Shaping' para sistemas multicuero oscilatorios con dinámica descrita por DAE: Aplicación a sistemas mecánicos de transporte de piezas en cabeza

Input Shaping for Oscillatory Multibody Systems with Dynamics described by DAEs: Application to Overhead Cranes

Estela Souto Fernández^{1*}, Gerardo Peláez Lourido^{2*}, Higinio Rubio Alonso^{1*}

Resumen

Input Shaping es una tecnología de prealimentación cuya fiabilidad mejora la respuesta dinámica de los sistemas lineales descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE) y modelos de partículas orientadas. Este trabajo se dedica a examinar el Input Shaping en sistemas oscilatorios multicuero con dinámica descrita por ecuaciones diferenciales algebraicas (DAE). Se ha elegido una grúa con carga en un péndulo doble, ya que presenta dinámica no lineal. Se han obtenido sus modos de vibración a partir de los autovalores de la matriz jacobiana del espacio de estados del sistema. Para verificar la fiabilidad de estos modos de vibración, se muestreó el tiempo de oscilación correspondiente a los ejes locales de cada link. Así, la transformada de Fourier (FFT) de ambas señales permite la estimación de las frecuencias naturales asociadas a ambos modos, que corresponden con la sintetizada analíticamente. Se calcularon input shapers para esos multimodos de vibración gracias a la convolución de los shapers SI específicos de cada modo. En todo caso, el filtrado funciona bien para este sistema.

Palabras clave

Grúas con carga en cabeza, DAE, método de proyección de la velocidad, matriz R, autovalores del sistema multicuero.

Abstract

Input Shaping is a feedforward technology whose reliability improves the dynamic response of linear systems described by Ordinary Differential Equations (ODEs). This work examines the issue of Input Shaping for multibody oscillatory systems whose dynamics is described by differential algebraic equations (DAEs). An overhead crane whose payload is a double link was chosen. This multimode system exhibits nonlinear dynamics and its modes of vibration have been obtained by carrying out the eigenvalues of the Jacobian matrix of the state-space equations system. Said modes of vibration were collected against each link's orientation and the FFT of the time signals allowed for the estimation of the system natural frequencies. Also Input Shapers were calculated for those modes of vibration by convolving specified insensitive IS-shapers for each mode. Filtering performed well in the end.

Keywords

Overhead cranes, DAEs, velocity projection method, R-matrix, Multibody System Eigenvalues.

Recibido / received: 15.05.2018. Aceptado / accepted: 18.06.2018.

¹Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad Carlos III de Madrid. ²Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidade de Vigo.

*Autores para correspondencia/corresponding authors: Estela Souto Fernández (estela.souto@alumnos.uc3m.es); Gerardo Peláez Lourido (gpelaez@uvigo.es) e Higinio Rubio Alonso (hrubio@ing.uc3m.es).



Foto: Shutterstock.

Introducción

El número de grúas en uso se ha convertido en un indicador fiable del grado de desarrollo y crecimiento económico de un país. El estudio de este conjunto de máquinas ha recibido una atención significativa con el objetivo de mejorar su respuesta dinámica. El grupo de grúas objeto de este trabajo es el de sistemas de transporte de piezas en cabeza, utilizados en fábricas para alimentar componentes como tipos de piezas o cuerpos, en células de fabricación y almacenes intermedios. Las piezas se desplazan colgadas de ganchos a carritos que se trasladan en una guía. La oscilación respecto de la vertical que sufren las piezas en este tipo de sistemas de transporte representa una respuesta dinámica indeseada desde una perspectiva ingenieril.

El retorno de inversión económica en mejorar estos sistemas mecánicos es solo un argumento de los muchos que justifican por qué estudiar, analizar y tratar de mejorar la respuesta dinámica de estos sistemas.

Definición del problema

Las operaciones realizadas con grúas con carga en cabeza llevan asociadas cargas distribuidas multicuerpo en mo-

vimiento. Mitigando la influencia transitoria se evita la colisión entre tales cargas y sus alrededores. Si se cancela la vibración residual al final del movimiento, se facilitan las operaciones de carga y descarga; superar la flexibilidad beneficia la rapidez de ejecución y efectividad de las operaciones.

Se han encontrado trabajos, referenciados en la bibliografía, que han estudiado la forma de anticiparse a la respuesta dinámica de los sistemas subamortiguados denominada Posicast (Smith, 1957), que convierte un escalón de entrada en una escalera *shapeada*. Por desgracia, esta teoría era muy sensible a los errores en la identificación de las frecuencias naturales de vibración de los sistemas mecánicos.

Sin embargo, en 1989 dos ingenieros del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT), Singer y Seering (Neil, Warren y Seering, 1990), consiguieron minimizar la vibración de forma anticipada a la respuesta, por medio de la resolución del cálculo de filtro de retardo temporal, robustos frente a errores de identificación. Esta teoría se denominó *Input Shaping*, y creció y se conocen hoy en día variaciones de la misma (Book, 1993; Junkins y Kim, 1993). Sin embargo, falta el trabajo

relativo a la aplicación de los sistemas multicuerpo, cuya dinámica está descrita por ecuaciones diferenciales algebraicas (DAE), donde la identificación de las frecuencias naturales y las proporciones amortiguadas no son fáciles de obtener como en el caso de sistemas lineales descritos por Ordinary Differential Equations (ODE).

Para dar solución al problema de la mejora de la respuesta dinámica del sistema de transporte de piezas en cabeza mediante *Input Shaping* se ha limitado la vibración de la carga suspendida, dos piezas paralelepípedicas articuladas entre sí o *links* y la superior, a su vez, unida al carrito. Este sistema se modela mediante técnicas de sistemas multicuerpo.

El sistema multicuerpo construido en laboratorio simula el comportamiento de una grúa pórtico.

Análisis cinemático del modelo multicuerpo de grúas pórtico

El sistema multicuerpo de la figura 1 contiene tres cuerpos móviles: el carrito (1), el primer *link* (2) y el segundo *link* (3) de la carga. También se tiene un sistema x-y (0). El sistema de los tres cuerpos también se define, asumiendo que se conocen los centros de masa,

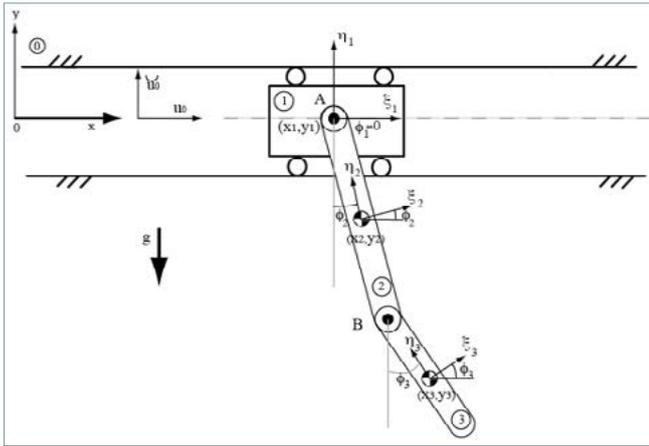


Figura 1. Grúa pórtico con el carrito y la carga formada por los dos links, modelado como un sistema multicuerpo.

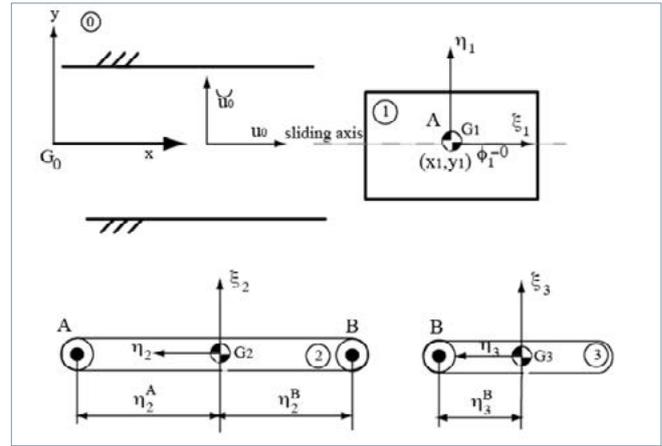


Figura 2. El sistema multicuerpo objeto de este estudio visto como un sistema sin restricciones.

que coinciden con los orígenes de los sistemas locales de cada cuerpo.

Las juntas de revolución están posicionadas con respecto a sus respectivos sistemas de referencia y, como muestra la figura 2, hay:

1. Una junta traslacional entre el cuerpo (1), el carrito y el sistema fijo.
2. Una junta de revolución entre el cuerpo (2), el primer link y el carrito (1).
3. Una junta de revolución entre el cuerpo (3), el segundo link y el primer link.

Los tres cuerpos móviles y el sistema fijo, sin considerar la existencia de juntas, forman un sistema sin restricciones como el que muestra la figura 2. Las coordenadas x e y del origen de cada eje ξ - η describen las coordenadas de ese cuerpo. El ángulo entre cada eje ξ y cada eje x describe la coordenada rotacional de cada cuerpo Φ . Estas coordenadas hacen un total de nueve variables, ya que cuando los cuerpos se mueven las coordenadas varían sus valores.

Si se fuerza la presencia de juntas cinemáticas, estas variables ya no serán independientes unas de otras. Teniendo en cuenta la figura 2, la ecuación de restricción para la junta de revolución A escrita en forma compacta es:

$${}^{(r,2)}\Phi = r_2^A - r_1^A = r_2 + s_2^A - r_1 - s_1^A = 0 \tag{1}$$

donde s_2^A y s_1^A establecen el vector que va desde el origen de los ejes locales hasta el punto. Dicho vector se obtiene como función de las coordenadas locales del punto A en los ejes locales del cuerpo (2), sin pérdida de la generalidad.

Según esto, la restricción expresada por la ecuación (1) puede ser representada en la siguiente forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \cos \Phi_2 & -\sin \Phi_2 \\ \sin \Phi_2 & \cos \Phi_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_2^A \\ \eta_2^A \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2}$$

De la misma forma, la ecuación de restricción para la junta de revolución del punto B se escribe en forma compacta

$${}^{(r,2)}\Phi = r_3^B - r_2^B = 0 \tag{3}$$

Y se puede representar en forma matricial

$$\begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \cos \Phi_3 & -\sin \Phi_3 \\ \sin \Phi_3 & \cos \Phi_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_3^B \\ \eta_3^B \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \cos \Phi_2 & -\sin \Phi_2 \\ \sin \Phi_2 & \cos \Phi_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_2^B \\ \eta_2^B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4}$$

En los ejes de la junta deslizante se necesitan dos puntos y un vector unitario para establecer la ecuación de restricción en una expresión compacta como la siguiente:

$${}^{(t,2)}\Phi = \begin{Bmatrix} u_0 \cdot \vec{d} \\ \phi_1 \end{Bmatrix} = 0 \tag{5}$$

donde las coordenadas del vector $u_0 = \{1,0\}$. Nótese que este vector unitario está referido a los ejes globales (x, y) , por lo que sus coordenadas locales coinciden con las globales. Los puntos O y A se usan para construir el vector $\vec{d} = r_1 - r_2 = \{x_1 - 0, y_1 - 0\}$. De acuerdo con (5), el valor del producto escalar entre rotado 90° , por el vector es cero, por tanto:

$${}^{(t,2)}\Phi = \begin{Bmatrix} -u_{0y}d_x + u_{0x}d_y \\ \phi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0 \cdot x_1 + 1 \cdot y_1 \\ \phi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{6}$$

La restricción de la junta deslizante resulta ser un valor constante cero para y_1 y el ángulo entre los ejes locales ξ_1 y el eje global x , es decir, el ángulo ϕ_1 , vale cero durante todo el movimiento. Además de las restricciones cinemáticas, también se considerarían las del *driver*, porque el movimiento del carrito, cuerpo (1), a lo largo de los ejes traslacionales está definido por dichas restricciones. Entonces, su posición depende del valor de una función dependiente del tiempo *shaped* $f_s(t)$ o *unshaped* $f_u(t)$. Esta restricción se puede expresar como:

$${}^{(d-x_{1,1})}\Phi = \{x_1 - f(t)\} = 0 \tag{7}$$

El carrito con los dos links y el sistema fijo, sin considerar la existencia de las juntas y el *driver*, forman un sistema sin restricción como el que se muestra en la figura 2. Las coordenadas x - e y - del origen de cada sistema ξ - η describen las coordenadas traslacionales del cuerpo. El ángulo entre cada eje- ξ y el eje- x describe, a su vez, las coordenadas rotacionales del doble link. En principio, estas coordenadas son representadas en tres matrices tales como:

$$c_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \emptyset_1 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \emptyset_2 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \emptyset_3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Estas nueve coordenadas son variables, por lo que, si los cuerpos se mueven libremente en el plano, las coordenadas pueden tener diferentes valores. Si se fuerza la presencia de juntas cinemáticas como las descritas anteriormente, estas variables dejan de ser independientes. Los grados de libertad de este sistema mecánico son tres, de acuerdo con la ecuación $DOF = n_v - n_c = 9 - 6 = 3$, sin tener en cuenta la coordenada del *driver*. Son seis ecuaciones de restricción correspondientes a las juntas cinemáticas. Juntando las n_v coordenadas dependientes definidas como c se tiene

$$c' = \{x_1 \ y_1 \ \emptyset_1 \ x_2 \ y_2 \ \emptyset_2 \ x_3 \ y_3 \ \emptyset_3\} \quad (9)$$

Las restricciones de posición introducidas en las ecuaciones (1) a (6) se pueden expresar, de forma general, como

$$\Phi(c) = 0 \quad (10)$$

cuya derivada del tiempo es

$$\dot{\Phi} = D \cdot \dot{c} = 0 \quad (11)$$

donde la matriz D representa la jacobiana de las ecuaciones de restricción (1) a (6). Este puede obtenerse derivando dichas ecuaciones. Así, la derivada del tiempo de la ecuación de restricción de la junta de revolución A en forma compacta es

$${}^{(r,2)}\dot{\Phi} = \dot{r}_2 + s_2^A \cdot \dot{\emptyset}_2 - \dot{r}_1 \quad (12)$$

En función de los ejes de referencia locales, esta ecuación se puede expandir para obtener el subjacobiano de la junta de revolución A.

$${}^{(r,2)}\dot{\Phi} = \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -(\xi_2^A \sin \emptyset_2 + \eta_2^A \cos \emptyset_2) \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & (\xi_2^A \cos \emptyset_2 - \eta_2^A \sin \emptyset_2) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\emptyset}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\emptyset}_2 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Se obtienen las mismas expresiones para la junta de revolución B:

$${}^{(r,2)}\dot{\Phi} = \dot{r}_3 + s_3^B \cdot \dot{\emptyset}_3 - \dot{r}_2 - s_2^B \cdot \dot{\emptyset}_2 \quad (14)$$

$$\dot{\Phi} = \begin{Bmatrix} -1 & 0 & (\xi_2^B \sin \emptyset_2 + \eta_2^B \cos \emptyset_2) & 1 & 0 & -(\xi_3^B \sin \emptyset_3 + \eta_3^B \cos \emptyset_3) \\ 0 & -1 & (-\xi_2^B \cos \emptyset_2 + \eta_2^B \sin \emptyset_2) & 0 & 1 & (\xi_3^B \cos \emptyset_3 - \eta_3^B \sin \emptyset_3) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\emptyset}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{\emptyset}_3 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Finalmente, las restricciones de la velocidad correspondientes a la junta traslacional son expresadas como

$${}^{(t,2)}\dot{\Phi} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\emptyset}_1 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Uniendo lo obtenido en las ecuaciones (12) a (16) se cons-

truyen todas las restricciones de la velocidad dadas por la matriz jacobiana del sistema que se multiplica por el vector de las variables dependientes.

$$\dot{\Phi} = \begin{Bmatrix} {}^{(t,2)}\dot{\Phi} & 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 2} \\ {}^{(r,2)}\dot{\Phi}_A & \dots & 0_{3 \times 2} \\ 0_{3 \times 2} & {}^{(r,2)}\dot{\Phi}_B & \dots \end{Bmatrix} \cdot \{\dot{c}\} = \{0_{1 \times 9}\} \quad (17)$$

También se puede escribir esta ecuación de una forma más compacta como en (11). Y, derivando de nuevo, la restricción de la aceleración queda como sigue:

$$\ddot{\Phi} = D \cdot \ddot{c} + \dot{D} \cdot \dot{c} = D \cdot \ddot{c} - \gamma = 0 \quad (18)$$

Las ecuaciones de movimiento del sistema de cuerpos sin restricciones mostradas en la figura 2 tienen la forma general

$$M\ddot{c} = h \quad (19)$$

Las ecuaciones de movimiento para el sistema de carga representado en la figura 1 deben incluir las fuerzas de contacto entre los cuerpos, que se pueden modelar con ayuda del jacobiano más los multiplicadores de Lagrange.

$$M\ddot{c} = h + D' \cdot \lambda \quad (20)$$

Estas ecuaciones representan la dinámica del conjunto de cuerpos con restricciones, transformadas en coordenadas de los cuerpos. Si las incógnitas son las aceleraciones \ddot{c} y los multiplicadores de Lagrange λ , estas ecuaciones se tratan como lineales algebraicas. Sin embargo, cuando las incógnitas son las coordenadas y las velocidades, esas mismas ecuaciones se tratan como diferenciales algebraicas de segundo orden (DAE). Las ecuaciones algebraicas en (20) deben ser resueltas para las aceleraciones. Pero hay más incógnitas que ecuaciones, por lo que se añaden las restricciones de las aceleraciones de las ecuaciones (18) a (20) y se reorganizan de la forma

$$\begin{bmatrix} M & -D' \\ D & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{c} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Estas ecuaciones algebraicas se pueden resolver para las incógnitas \ddot{c} y λ , y se pueden considerar ecuaciones de movimiento para un sistema multicuerpo arbitrario, con una masa representada por la matriz M : el jacobiano con las restricciones D que está sujeto al vector de fuerzas externas h .

Hay gran cantidad de herramientas computacionales para

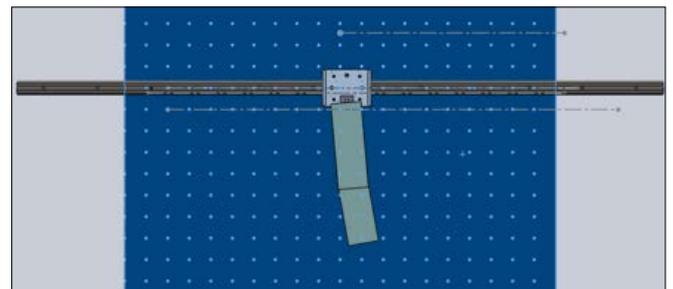


Figura 3. Esquema de una grúa pórtico en SolidWorks transferido como modelo relacional al módulo Simmechanics.

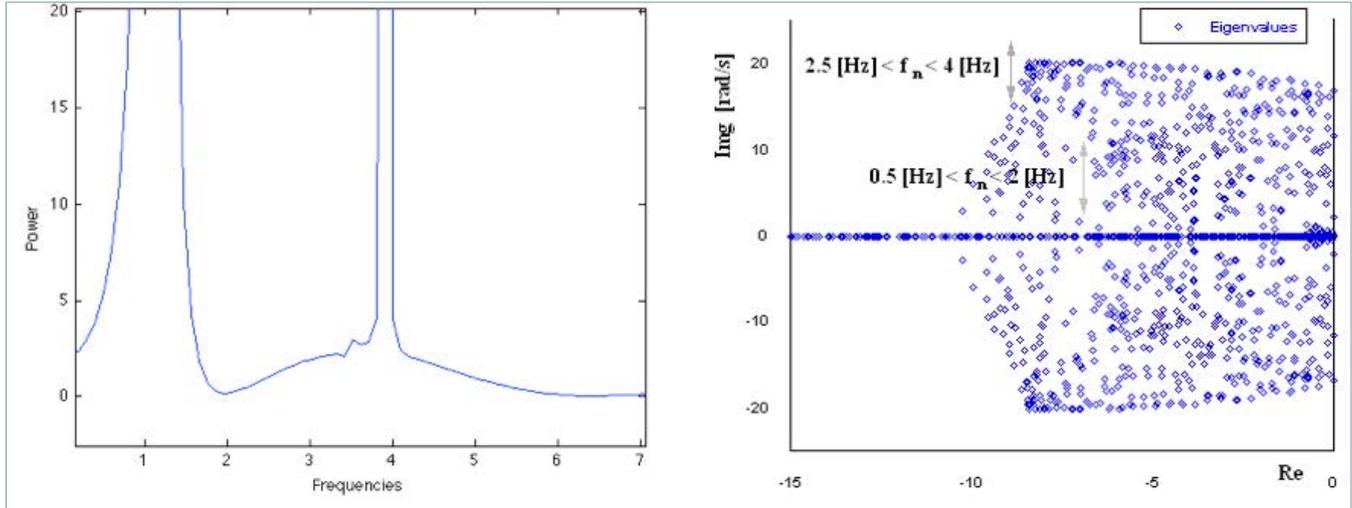


Figura 4. (a) Conjunto de autovalores correspondientes a los modos flexibles del sistema no lineal real. (b) Transformada de Fourier correspondiente al ángulo que forma el segundo link .

la integración numérica de (21). MBS3D es un recurso libre para la simulación de la dinámica de sistemas multicuerpo. Se programa como texto llano de Matlab y emplea un método muy eficiente y de testeo matemático desarrollado en García de Jalón y Bayo (1994).

Debido a su popularidad y facilidad de uso, se eligió un script de Matlab como lenguaje de programación para las rutinas que se desarrollan en cada capítulo del libro de texto de Nikravesh (2008).

Finalmente, gracias a la funcionalidad de SolidWorks de poder exportar ensamblajes como el de la figura 3, con restricciones relacionales, a formato .xml, se puede obtener un conjunto de bloques de Simulink lanzados a través del módulo Simmechanics, los cuales reproducen la dinámica del sistema multicuerpo real.

Análisis dinámico: estimación de los autovalores

Como en cada problema de modelado *shaping*, el primer paso consiste en estimar las frecuencias naturales del sistema multicuerpo. Basándose en el método de la proyección de la velocidad de la matriz R, método realizable con la ecuación (21) para obtener una ODE con dimensión para el sistema multicuerpo, igual al número real de grados de libertad, usando un conjunto de coordenadas independientes (García de Jalón y Bayo, 1994), es decir, la expresión del estado del sistema que permitirá estimar las frecuencias naturales de vibración llevando a cabo los autovalores de la matriz jacobiana A de estados. Inicialmente, se establecen los posibles movimientos que el sistema multicuerpo podría tener de acuerdo con las ecuaciones de restricción. De tal forma, el término movimientos debería ser, en realidad, velocidades.

Se considera el vector \dot{c} ($i = 1, 2, \dots, f$) un conjunto de f vectores linealmente independientes que constituye la base del espacio nulo de D , nulo porque $D \cdot \dot{c} = 0$. Cualquier vector de velocidad \dot{c} dependiente se puede expresar como combinación lineal de esta base como sigue:

$$\dot{c} = r_1 \cdot \dot{z}_1 + r_2 \cdot \dot{z}_2 + r_3 \cdot \dot{z}_3 + \dots + r_f \cdot \dot{z}_f \tag{22}$$

Teniendo una matriz $R_{n \times f}$ (22) se puede escribir

$$\dot{c} = R \cdot \dot{z} \tag{23}$$

Pero, como los vectores r_i son los componentes de una base del espacio nulo de la matriz jacobiana D , se verifica entonces que $D \cdot r_i = 0$ y $D \cdot R = 0$ y . La matriz R depende del vector de posición c y, por tanto, existe una matriz R diferente por cada posición del sistema multicuerpo. Así, la derivada del tiempo de la ecuación (23) resulta

$$\ddot{c} = R \cdot \ddot{z} + \dot{R} \cdot \dot{z} \tag{24}$$

El conjunto de coordenadas independientes z_i se eligió como $\dot{z}_1 = \dot{x}_1$, $\dot{z}_2 = \dot{\phi}_2$, $\dot{z}_3 = \dot{\phi}_3$. En este caso, la matriz R que expresa la dependencia como función de coordenadas independientes, se puede sintetizar escribiendo las velocidades de los centros de masas. Para el primer *link* la velocidad del centro de masas es

$$\vec{V}_{G2} = \vec{V}_A + \dot{\phi}_2 \hat{k} \times (\eta_2^A \cos \phi_2 t - \eta_2^A \sin \phi_2 t) \tag{25}$$

Que puede ser expresada en función de las variables dependientes

$$\dot{x}_2 t + \dot{y}_2 t = \dot{x}_1 t + \dot{\phi}_2 \hat{k} \times (\eta_2^A \sin \phi_2 t - \eta_2^A \cos \phi_2 t) \tag{26}$$

Para la junta de revolución B, estas ecuaciones quedan así:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_{G2} + \dot{\phi}_3 \hat{k} \times (-\eta_3^B \cos \phi_3 t + \eta_3^B \sin \phi_3 t) \tag{27}$$

$$\dot{x}_3 t + \dot{y}_3 t = \vec{V}_B + \dot{\phi}_3 \hat{k} \times (\eta_3^B \sin \phi_3 t - \eta_3^B \cos \phi_3 t) \tag{28}$$

De nuevo, esta ecuación puede usarse para obtener las velocidades, variables dependientes (\dot{x}_2, \dot{y}_2) , (\dot{x}_3, \dot{y}_3) , en función de las velocidades, variables dependientes $\dot{z}_1 = \dot{x}_1$, $\dot{z}_2 = \dot{\phi}_2$, $\dot{z}_3 = \dot{\phi}_3$.

Finalmente, si se unen las ecuaciones (25) a (28), la matriz R puede expresarse como

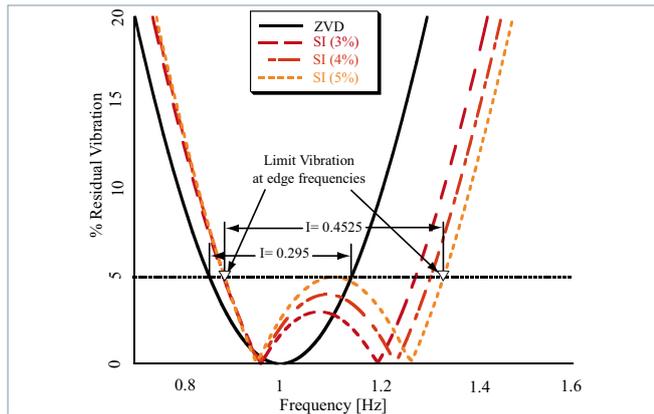


Figura 5. Curvas que representan la robustez del Input Shaper asociado al nivel tolerable de vibración residual.

$$\{\dot{c}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \eta_2^A \cos z_2 & 0 \\ 0 & \eta_2^A \sin z_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \eta_2^A \cos z_2 - \eta_2^B \cos z_2 & \eta_3^B \cos z_3 \\ 0 & \eta_2^A \sin z_2 - \eta_2^B \sin z_2 & \eta_3^B \sin z_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix} \quad (29)$$

donde $\eta_2^A > 0$, $\eta_2^B < 0$, y $\eta_3^B > 0$.

Se sustituye aquí la ecuación (24) por (20), obteniendo

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{R} \cdot \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{D}' \cdot \lambda = \mathbf{h} \quad (30)$$

Aplicando métodos de resolución matricial por trasposición y teniendo en cuenta que $\mathbf{D} \cdot \mathbf{R} = 0$

$$\mathbf{R}' \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R} \cdot \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{R}' \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{R}' \cdot \mathbf{h} \quad (31)$$

De este modo, las ODE correspondientes a las variables independientes, extraídas de las DAE iniciales en variables dependientes son

$$\ddot{\mathbf{z}} = (\mathbf{R}' \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R})^{-1} \cdot [\mathbf{R}' \cdot \mathbf{h} - \mathbf{R}' \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{z}}] \quad (32)$$

Aquí es factible obtener la matriz \mathbf{A} del espacio de estados:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \frac{\partial(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{z}} & \frac{\partial(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q})}{\partial \dot{\mathbf{z}}} \end{pmatrix} \quad (33)$$

donde $\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{R}'\mathbf{M}\mathbf{R}$ y $\bar{\mathbf{Q}}$ se igualan a la matriz resultante de la expresión que va entre paréntesis en la expresión (32). Ambas derivadas de (33) llevan consigo una serie de expresiones compactas. Sin embargo, Javier Cuadrado demostró en (Nikravesh et al., 2008) que se pueden aproximar por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (34)$$

Al considerarse despreciable la amortiguación y debido a la falta de muelles, se simplifica \mathbf{A} , que será 6×6 de acuerdo con el espacio de estados establecido. Se pueden encontrar

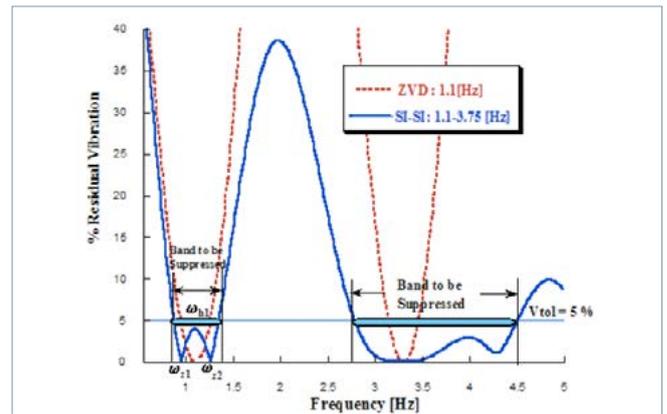


Figura 6. Incremento de la robustez del shaper SI-SI convolucionado.

dificultades en el cálculo de A_{22} , aunque R_q es el jacobiano de la matriz R calculada para las variables dependientes, es decir, una hipermatriz de rango $9 \times 3 \times 9$. Ambas matrices A_{21} y A_{22} resultan de rango 3×3 .

Los autovalores de A son obtenidos en la Figura 4 (a) mediante la representación por integración numérica de (21), cuando ambos *links* son colineales y se separan alrededor de 5 grados del punto vertical de equilibrio.

La figura 4 (b) muestra la transformada de Fourier de la señal correspondiente al ángulo \varnothing , durante la integración numérica.

En ambas figuras se han identificado dos bandas de frecuencias naturales con centros en 1,17 [Hz] y 3,8 [Hz]. La primera es $0,7 < f_n < 1,7$ [Hz], mientras que la segunda $2,5 < f_n < 4$ [Hz]. Esto reafirma la idea de que el procedimiento adoptado para llevar a cabo los autovalores de la matriz jacobiana A del espacio de estados es una herramienta muy útil para identificar las bandas de frecuencias naturales donde los *links* tienden a vibrar. Además, se aprecia que el sistema no oscila a frecuencias mayores de 4,5 [Hz].

Shaper robusto limitador de la vibración

El objetivo principal de este trabajo es la creación de un *Input Shaping* adecuado al control de las vibraciones autoinducidas en los sistemas con dinámica multicuerpo.

Al tratarse de un transporte con carga en cabeza, implica un comportamiento oscilatorio de las cargas, que es una manifestación de los modos subamortiguados, excitados por la señal de entrada del carrito. Así, se empleará una técnica de control que da forma a dicha señal en anticipación a la respuesta esperada. Si el sistema está bien modelado esta será muy próxima a la respuesta real.

Una vez identificado el rango de frecuencia donde la carga multicuerpo tiende a vibrar, el siguiente paso es calcular separadamente un filtro de retardo (*Input Shaper*) para cada modo/banda y, después, convolucionar ambos filtros juntos para generar un bucle abierto de perfiles de velocidad para el carrito que satisfaga el objetivo deseado.

La figura 5 muestra varias curvas de sensibilidad, donde la amplitud de la vibración residual es planteada en función de la frecuencia real. La curva negra corresponde al *shaper* ZVD. El eje vertical viene dado por la ecuación de la energía residual (35), mientras el horizontal es el rango de frecuencias correspondiente a la primera banda.

$$V_{tol} \geq e^{-\zeta\omega T_n} \cdot \sqrt{(C(\omega, \zeta))^2 + (S(\omega, \zeta))^2} \tag{35}$$

donde

$$C(\omega, \zeta) = \sum e^{-\zeta\omega T_i} \cdot A_i \cdot \cos(\omega\sqrt{1 - \delta^2 T_i}) \tag{36}$$

$$S(\omega, \zeta) = \sum e^{-\zeta\omega T_i} \cdot A_i \cdot \sin(\omega\sqrt{1 - \delta^2 T_i}) \tag{37}$$

Por otro lado, la robustez viene dada por el ancho de la curva en algún punto del nivel tolerable de vibración, parámetro denominado insensibilidad de frecuencia del *shaper* (I). Para conseguir una robustez mayor se debe seleccionar un *shaper Specified Insensitive* (SI) diseñado para mitigar la vibración en un rango de frecuencias específico y obtenido de forma sencilla por la técnica de la frecuencia muestreada (Cuadrado, Dopico, Pérez y Pastorino, 2012), que usa la ecuación (35) en cada una de las frecuencias contenidas en la banda de frecuencias dada.

Una estrategia alternativa para generar filtros SI implica parametrizar la curva de sensibilidad más los coeficientes del filtro y resolver mediante un gradiente (basado en un algoritmo de optimización de restricciones) los parámetros óptimos. En este caso, el filtro se puede parametrizar en términos de períodos de retardo y ganancias, por ejemplo:

$$IS = A_1\delta(t) + A_2\delta(t - T_{s2}) + A_3\delta(t - T_{s3}) \tag{38}$$

donde A_1, A_2, A_3 son las amplitudes de los impulsos del *Input Shaper*, mientras que T_{s2} y T_{s3} son los tiempos en los que se aplican los impulsos. El primer impulso se aplica en cero para minimizar el retardo inducido por el filtro, todos ellos parámetros por determinar, así como ω_{h1} o frecuencia a la cual el pico de la curva de sensibilidad tiene lugar y las frecuencias de contacto ω_{z1}, ω_{z2} donde el filtro de la curva de sensibilidad de SI debe ser cero entre la frecuencia ω_{h1} , donde la cresta de la curva de sensibilidad tiene lugar y la pendiente es cero.

En este punto en el que todos los parámetros han sido enumerados, se realiza un problema de optimización donde el objetivo es minimizar T_{s3} . Las restricciones han sido enumeradas anteriormente y, además, la suma de las amplitudes ha de sumar uno para que el comando *shaped* alcance el mismo punto final que en comando *unshaped* o sin filtrar.

La solución al problema de optimización es factible. Se obtiene un *shaper* SI con $I = 0,4$ y $V_{tol} = 0,5\%$, centrada en $f_{n1} = 1,1$ [Hz], y asumiendo los pequeños amortiguamientos despreciables, se tiene

$$IS_{1,1Hz} = 0,263\delta(t) + 0,475\delta(t - 0,455) + 0,263\delta(t - 0,909) \tag{39}$$

La robustez de este *shaper* es de alrededor del 20% del valor nominal $f_n = 1,1$ [Hz], correspondiente al rango de frecuencias de aproximadamente $0,88 < f_n < 1,32$ [Hz], similar al rango correspondiente a la primera banda donde, recuérdese, el multicuerpo tiende a vibrar.

Si se incrementa la insensibilidad I se puede encontrar una mejora de la robustez, pero esto se traduce en el aumento de la longitud del *shaper* a un número de impulsos mayor que tres.

Si se desarrolla el problema de optimización para el segundo modo a 3,75 [Hz], se obtiene el *shaper* SI

$$IS_{3,75Hz} = 0,263\delta(t) + 0,475\delta(t - 0,133) + 0,263\delta(t - 0,267) \tag{40}$$

Un *shaper* convolucionado tiene más impulsos que uno directo. La convolución total de los filtros de retardo temporal dados por (39) y (40) forman un *shaper* SI-SI descrito por una ecuación similar a estas, pero con muchos más sumandos, uno por cada impulso.

En la figura 6 se muestran las curvas de sensibilidad para el modo simple ZVD a 1,1 [Hz] y el modo doble SI-SI. Afortunadamente, la convolución total entre ambos *shapers* tiene efectos beneficiosos en cuanto a la robustez de la segunda banda de frecuencias. Los modos de vibración del sistema multicuerpo tienen los valores

comprendidos entre 2,75 y 4,5 [Hz], mientras que la vibración residual permanecerá por debajo del nivel tolerable de amplitud de vibración. La razón puede estar en la contribución del primer *shaper*, ya que los de modo simple suprimen la vibración en múltiplos impares de su frecuencia de diseño, como muestra la curva del *shaper* ZVD a la frecuencia de 1,1 [Hz]. Así, las propiedades de vibración del primer *shaper* $IS_{1,1}$ a múltiplos impares de frecuencias más altas son transmitidas al *shaper* SI-SI resultante.

De cualquier modo, entre 1,5 y 2,75 [Hz] el SI-SI convolucionado no mitiga la amplitud de la vibración residual, pero cuando se compara con el de la figura 4, el sistema multicuerpo no tiende a vibrar en dicha banda de frecuencias, así que el *shaper* SI-SI convolucionado atenúa la vibración en las bandas necesarias, lo que se corresponde con la filosofía de *Input Shaping*, que no tiene en cuenta el resto de las bandas de frecuencia en las que el sistema flexible no tiende a vibrar. Esta es la base de su superioridad cuando se compara con filtros de paso bajo o alto demostrados en (Singer et al, 1992).

Simulación y puesta en marcha de resultados experimentales

Los resultados de simulación de la fi-

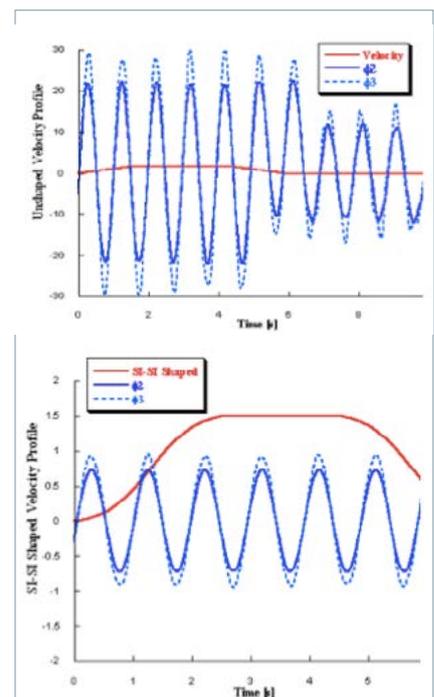


Figura 7. (a) Perfil de velocidades unshaped para \varnothing_2 y \varnothing_3 . (b) Perfil de velocidades shaped para \varnothing_2 y \varnothing_3 .



Figura 8. Montaje del prototipo MUTO en laboratorio.

gura 7 muestran una duración de 1,75 [s] para el *shaper* SI-SI. Sin embargo, el tiempo de subida de la rampa es 1,44 [s], es decir, 0,267 [s] más largo que la longitud del *shaper* SI-SI. Entonces, estos datos garantizan que la convolución total es matemáticamente viable, eficiente y eficaz.

La figura 7 (a) muestra las respuestas de las deflexiones angulares de los dos *links* (\varnothing_2 y \varnothing_3) cuando el carrito trabaja bajo un perfil de velocidades *unshaped*. Hay una vibración significativa para las respuestas de ambos *links*. También la figura 7 (b) muestra las respuestas cuando el perfil de velocidades es conformado con el *shaper* SI-SI.

Nótese que, como se esperaba para el mismo rango de parámetros cinemáticos, la vibración residual en modo *shaped* siempre es pequeña. Si la amplitud de vibración en modo *shaped* se divide entre la vibración en modo *unshaped*, el porcentaje resultante de vibración es menor que el 5% para la deflexión angular de cada *link*.

Para reforzar este resultado, se presentan a continuación las respuestas del prototipo real. Los experimentos fueron llevados a cabo en una minigrúa pórtico (MUTO: *Multibody Two-link payload Overhead crane*), representada en la figura 8. MUTO se compone de un patín fijado a una guía lineal, cuyo carrito está comandado por un servomotor unido, a su vez, al carrito por una placa de polipropileno y una estructura formada por perfiles de aluminio. El eje del servomotor tiene en su extremo un engranaje.

A mayores, se acopló un potenciómetro rotativo, actuando como unión del primer *link* con el carrito, sensor que mide la deflexión \varnothing_2 . El segundo *link* está conectado al primero por una segunda junta de revolución, esta vez sin potenciómetro acoplado, debido a que se añadiría una masa que falsearía los parámetros inerciales.

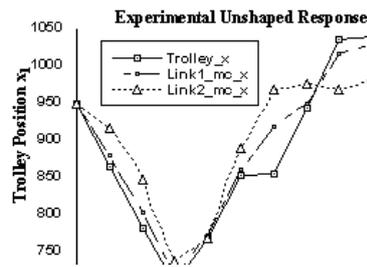
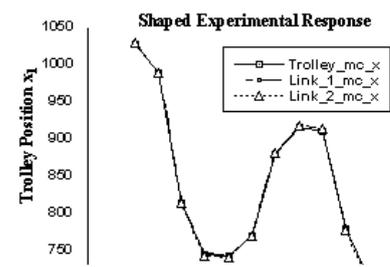


Figura 9. (a) Posición x- de los centros de masas frente al tiempo en comando unshaped. (b) Posición x- de los centros de masas frente al tiempo en comando shaped.



El *driver* del servomotor se conectó a un microcontrolador Mbed con un convertidor D/A. La señal de la velocidad es generada por ese Mbed. Además, MUTO puede moverse a distancia empleando un *joystick* cuyas órdenes alimentan a la Mbed.

Finalmente, la convolución total es llevada a cabo en tiempo real gracias a la introducción del *shaper* SI-SI en el programa C de la Mbed.

MUTO se hizo mover durante más de 10 [s] a través de su espacio de operaciones. Se recogieron los datos de las deflexiones \varnothing_2 y \varnothing_3 y se filmó, al mismo tiempo, la trayectoria de los centros de masas de ambos *links* (Fig. 8) de forma que se conociera la posición de los mismos frente al tiempo transcurrido. A pesar de optar por una frecuencia de muestreo limitada de alrededor de 30 [Hz], las respuestas a las órdenes filtradas y no filtradas (*shaped* y *unshaped*) se obtuvieron resultados que permiten afirmar que la orden no filtrada causa desviaciones significativas de la posición x- del centro de masas de los *links* con respecto a la posición x- del carrito, mientras que la orden filtrada SI-SI elimina tal desviación entre los centros de masas, como se puede apreciar en la figura 9 (b).

Paralelamente, se analizaron las posiciones y- de los centros de masas. Aparecieron pequeñas vibraciones que no merecen un estudio más profundo, ya que pueden deberse a ciertas incertidumbres en la medida.

Conclusiones

Pese a haberse encontrado inicialmente dificultades a la hora de encontrar un método para obtener los autovalores, el jacobiano del espacio de estados ha permitido obtener las bandas de frecuencias de vibración del sistema multicuerpo.

La relación entre las DAE en variables dependientes correspondientes a

las ODE en variables independientes se establece con ayuda del método de proyección de la matriz R para las velocidades. Entonces, se extrae la frecuencia natural circular por el método de integración hacia delante, a partir del modelo multicuerpo analítico de la grúa pórtico. Gracias a esto, se ha podido aplicar un filtro apropiado para conseguir obtener el objetivo que era la mitigación de vibración residual.

Para reforzar los resultados y la fiabilidad del análisis de los autovalores, se comprobó experimentalmente la deflexión experimental para las respuestas *shaped* y *unshaped* y se ha demostrado el efecto beneficioso de aplicar *Input Shaping* al generador de órdenes de una grúa pórtico.

Referencias

- Book, W. (1993). *Controlled Motion in an Elastic World*, ASME J. Dyn. Sys., Meas., and Control, 115(2), June 1993.
- Cuadrado, Javier; Dopico, Daniel; Pérez, José A.; Pastorino, Roland (2012).. *Automotive observers based on multibody models and the extended Kalman filter*, Multibody Syst. Dyn. 27:319 DOI 10.1007/s11044-011-9251-1.
- García de Jalón, Javier; Bayo, Eduardo (1994). *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems: The Real-Time challenge*. Springer-Verlag, New York. ISBN 0-387-94096-0, 440 págs.
- Junkins, J.L.; Kim, Y. (1993). *Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures*. AIAA, Washington D.C.
- Neil, C.; Warren, P.; Seering, W.P. (1990). *Preshaping command inputs to reduce system vibration*. J. of Dynamics Sys., Measurement, and Control Vol. 112, pág. 7682.
- Nikravesh, Parviz E. (2008). *Planar Multibody Dynamics: Formulaion Programming and Applications*. CRC Press Taylor and Francis Group.
- Singer, N.C.; Seering, W.P. (1992). *An extension of Command Shaping Methods for Controlling Residual Vibration Using Frequency Sampling*, IEEE International Conference on Robotics and Automation. Nice, Francia, págs. 800-805.
- Singhose, William E.; Vaughan, Josua (2011). *Reducing Vibration by Digital Filtering and Input Shaping*, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 19, No 6, Noviembre.
- Smith, O.J.M. (1957). *Posicast control of damped oscillatory systems*. Proceedings of the IRE, págs. 1249-1255.