

60 AÑOS  
1952-2012

Este cuarto y último artículo que publicamos en facsimil para conmemorar el sexagésimo aniversario de *Técnica Industrial* se titula *La fotoelasticidad y su aplicación al diseño*. El correspondiente comentario técnico, a cargo de Antón Onieva y Francesc Estrany, muestra que esta técnica sigue ahí y que no ha tenido rival durante estos 60 años. Mejorada con accesorios más modernos, la fotoelasticidad se aplica actualmente con éxito en la edificación y en las industrias de fabricación de maquinaria, naval, aeronáutica y aeroespacial, entre otras.

## Fotoelasticidad aplicada al diseño

El artículo titulado *La fotoelasticidad y su aplicación al diseño*, publicado en 1952 en *Técnica Industrial*, realiza una presentación oportuna y rigurosa de esta técnica experimental, basada en las propiedades de los materiales birrefringentes que permite la medición de la distribución de los esfuerzos que recibe una determinada pieza de maquinaria en su zona de trabajo. El primer experimento de fotoelasticidad se había realizado con éxito a principios del siglo XX (E. Coker y de L. Filon en la Universidad de Londres), y por aquel entonces la fotoelasticidad era una innovación técnica de aplicación al diseño de piezas, especialmente en nuestro país.

El artículo define la necesidad del conocimiento de los perfiles de intensidad del conjunto de fuerzas que actúan sobre una pieza que trabaje bajo esfuerzo, para poderla diseñar correctamente. Se expone la complejidad que deriva de cualquier planteo matemático de las leyes de la elasticidad a un sistema representativo del problema real, a poco que la forma de la pieza se apartara de las formas simétricas básicas. Las ecuaciones diferenciales resultantes son, en muchos casos, imposibles de resolver de forma analítica. Además, los métodos numéricos de cálculo estaban aún muy poco desarrollados, con lo que la resolución del problema era inviable.

Tras este preámbulo, se presenta la fotoelasticidad como la técnica experimental que cubre oportunamente la necesidad descrita: se requiere reproducir un modelo de la pieza de pequeñas dimensiones, pero con la misma forma, empleando un material transparente y que se comporte como un material birrefringente al ser sometido a cargas de tensión y compresión. Cuando el modelo es atravesado por la luz polarizada mientras se le aplican las cargas de trabajo, aparecen unas franjas de diferentes formas e intensidades según la distribución e intensidad de las fuerzas que actúan sobre dicho modelo. Las tensiones observadas serán las mismas que recibirá la pieza real, cuando trabaje bajo la misma distribución e intensidad de cargas. La información obtenida permite optimizar el diseño de la pieza y su configuración de trabajo.

La parte central del artículo comprende una rigurosa exposición de los principios físicos y fórmulas que rigen el fenómeno de la fotoelasticidad, que se acompaña de esquemas y figuras que clarifican con eficiencia la información transmitida. Es muy destacable el ejemplo de aplicación de la fotoelasticidad descrito en el artículo, correspondiente al diente de engranaje de rueda dentada, uno de los componentes de maquinaria más empleados en la industria, y que por su configuración de trabajo, constituye un sistema de imposible tratamiento analítico. El artículo termina dejando bien claro cómo los estudios fotoelásticos permiten encontrar la solución al problema y optimizar los diseños.

Es un artículo de un muy buen nivel científico-técnico que no se

excede ni un ápice de la información necesaria para servir a sus objetivos y es capaz de destacar con maestría las grandes ventajas de las aplicaciones al diseño de la fotoelasticidad de este, entonces innovador, método experimental. A la vista de lo expuesto, la pregunta es qué ha sido de la técnica de la fotoelasticidad y su aplicación al diseño de piezas. Y la respuesta es que sigue aquí.

Cierto es que inicialmente le salió a la fotoelasticidad un gran "competidor": un método de cálculo numérico denominado método de los elementos finitos (MEF), que permite obtener soluciones numéricas sobre un cuerpo o estructura continua en que están definidas ciertas ecuaciones diferenciales que caracterizan el comportamiento físico del problema, dividiéndolo en un número elevado de subdominios (los "elementos finitos"). A partir de la década de 1980, con la generalización de los ordenadores personales, se extendió el uso de los programas comerciales basados en este método, con procesadores gráficos cada vez más potentes. Este método es fácilmente adaptable a problemas de transmisión de calor, mecánica de fluidos y campos electromagnéticos, siendo en muchos casos la única alternativa práctica de cálculo.

No obstante, todo lo indicado, para el diseño de piezas sometidas a esfuerzos, el MEF tiene el inconveniente que el modelado de las cargas que recibe una pieza de morfología no simple es muy difícil, y caso de aplicar simplificaciones estas llevan a soluciones muy alejadas del verdadero comportamiento del componente. En cambio, la fotoelasticidad, al ser una técnica experimental, permite utilizar cargas y tensiones muy aproximadas a la realidad del entorno de trabajo de la pieza que se va a diseñar.

En la actualidad, la técnica de la fotoelasticidad se ha mejorado con accesorios más modernos, como los polariscopios digitales equipados con led y diodos láser, que permiten la supervisión continua de las estructuras estudiadas. La preparación de modelos de pruebas se ha perfeccionado con el desarrollo de la esterolitografía, que utiliza un método llamado *rapid prototyping* (prototipado rápido) que permite la generación de modelos tridimensionales exactos de un polímero líquido en tiempos muy cortos. Y con la técnica de fotoelasticidad de transmisión se pueden realizar mediciones ópticas sobre piezas de materiales no transparentes, cubriendo la pieza opaca con una resina que presenta birrefringencia bajo carga. La fotoelasticidad, técnica que no ha tenido rival durante estos 60 años, se aplica con éxito en campos como el de la edificación, en industrias de fabricación de maquinaria y en las industrias naval, aeronáutica y aeroespacial. Decididamente, "una imagen vale más que mil palabras".

**Antón Onieva Sánchez y Francesc Estrany Coda**  
Ingenieros técnicos industriales en Química Industrial



# La Fotoelasticidad y su aplicación al diseño

Por A. MORENO CASTILLO

C. D.—539.3:621.38

**E**N el campo del diseño de máquinas y piezas resistentes ha sido mucho lo realizado hasta el presente: el conocimiento intrínseco de los materiales, su comportamiento rheológico al ser solicitados por fuerzas exteriores, en el que se juegan un interesante papel las acciones moleculares; la creación de nuevas teorías resistentes y de rotura, y, por último, el empleo de nuevos materiales constituyen notables progresos de indudable interés. No obstante, es muy exiguo el número de problemas que se pueden resolver mediante la simple aplicación de la Resistencia de Materiales e incluso de la Teoría de la Elasticidad. En cuanto que la configuración de los elementos a calcular difieren de la clásica pieza prismática u otras formas de tipo simple, los procedimientos de cálculo se complican, y solamente para establecer su planteamiento matemático se necesita recurrir a hipótesis simplificadoras, las cuales conducen siempre a indefectibles errores que obligan a emplear elevados coeficientes de seguridad.

La teoría de la elasticidad plantea el problema general, establece las ecuaciones de equilibrio interno en ecuaciones diferenciales entre derivadas parciales y las de equilibrio en el contorno junto con las condiciones de compatibilidad que las ligan a la forma geométrica del cuerpo. En todos los casos, es necesario encontrar una función de Airy, la cual cumple implícitamente las ecuaciones de compatibilidad y que, a su vez, corresponda con el tipo de ecuación que satisfaga a las ecuaciones de equilibrio interno y de contorno. El problema no tiene solución viable en la mayoría de los casos. Por ello, las grandes empresas industriales del mundo han adoptado el empleo de los modernos métodos experimentales, algunos de ellos, como la Fotoelasticidad, que nació al calor del Laboratorio científico, para en los últi-

mos años invadir el terreno de la Industria y de las Universidades técnicas.

La Fotoelasticidad, feliz conjunción de la Óptica y de la Elasticidad, es, pues, un método experimental que resuelve por procedimientos ópticos, de forma total en unos casos y parcial en otros, el problema de la distribución de esfuerzos en el interior de un sólido elástico, siempre que se conozcan las condiciones de distribución en el contorno. En principio, el método es únicamente aplicable a problemas elásticos planos, sobre cuerpos que cumplan las necesarias condiciones de isotropía, homogeneidad y elasticidad hookeniana, los cuales son reproducidos sobre un modelo de pequeñas dimensiones, fabricado de un material transparente y que goce de la propiedad de adquirir birrefringencia accidental por efecto de las cargas aplicadas. El modelo observando a través de luz polarizada presenta unas franjas de interferencia, de cuyo análisis y como más tarde se verá, se puede deducir el estado tensional producido, y referirlo al prototipo o pieza real, por medio de las condiciones de semejanza impuestas y cuyas expresiones se estudian en análisis Dimensional.

Existen materiales que por sí solos no son birrefringentes, pero que adquieren esta propiedad cuando son sometidos a esfuerzos mecánicos. Estos materiales se comportan, pues, cuando están tensionados, como si se tratasen de cristales naturales birrefringentes y con arreglo a las siguientes leyes fundamentales que vamos a enunciar:

Primera: Los planos de polarización producidos corresponden con los planos principales de las tensiones creadas; y

Segunda: La velocidad de propagación en cada plano depende de las intensidades, o sea de los valores de las tensiones principales, pro-



duciéndose una diferencia de fase entre los dos rayos refractados dados por la expresión:

$$\frac{2\pi}{\lambda} C \cdot h (\sigma_I - \sigma_{II}) \quad (1)$$

En la que  $\lambda$  es la longitud de onda,  $C$  una constante fotoelástica que depende del material y de la clase de luz empleados,  $h$  el espesor de la placa, y  $\sigma_I$  y  $\sigma_{II}$  las tensiones principales en el punto.

Estas leyes generales, demostradas y evidenciadas por la práctica, dan lugar al procedimiento fotoelástico que permite visualizar, materializar las tensiones en el interior de un cuerpo. Veamos cómo:

Supongamos una placa de vidrio plano paralela (fig. 1) sometida a unos determinados esfuerzos en su plano, y coloquémosla dentro del campo de luz producido por un polariscopio plano, que está dotado en principio de un manantial de luz monocromática.

Al atravesar la luz el polarizador  $P$ , cuyo eje óptico está situado en una posición arbitraria, la luz queda vibrando en un plano como el que se indica con el vector  $OM$ , cuya amplitud es  $A$ . Un rayo de luz que incide en un punto de la lámina de vidrio tensionada se descompone en un punto de la lámina de vidrio tensionada, se descompondrá en dos componentes  $OB$  y  $OC$ , según las direcciones de las tensiones principales en dicho punto, y cuyas respectivas amplitudes son  $A \cos \alpha$  y  $A \sin \alpha$ . Siendo  $\alpha$  el ángulo que forma el plano de vibración con uno

de los ejes principales de tensión, por ejemplo, el de  $\sigma_I$ . En este momento todavía los dos rayos están en fase. El rayo atraviesa el modelo y entonces, y en virtud de las leyes antes enunciadas, estos dos rayos se propagan con distintas velocidades, defasándose uno y otro y emergiendo en la otra cara, con una diferencia de marcha numéricamente dada por la expresión (1). Las amplitudes, por lo tanto, no se corresponden en el instante de salida. En estas condiciones llegan al analizador. Las respectivas vibraciones se proyectan en el nuevo plano de vibración, siendo entonces las amplitudes  $OB'$  y  $OC'$ , que valdrán  $A \cos \omega t \sin \alpha$  y  $A \sin \omega t \cos \alpha$ .

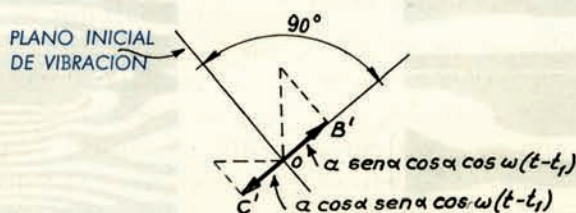
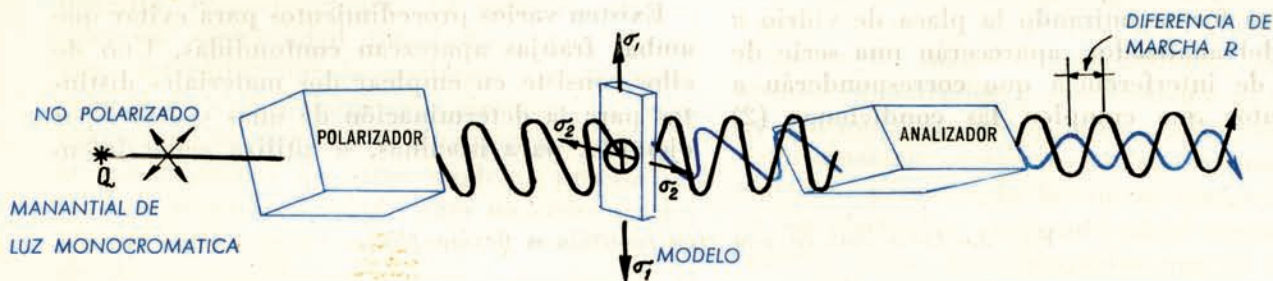
En estas condiciones se producirá extinción de luz siempre que

$$\alpha = n \frac{\pi}{z} \quad (2)$$

siendo  $n$  un número entero, puesto que en tales casos o bien el seno o el coseno se anulan, reduciéndose a cero la amplitud de la vibración y también para todo el conjunto de valores de la diferencia de tensiones siguientes

$$\sigma_I - \sigma_{II} = n \frac{\lambda}{C \cdot h} \quad (3)$$

siendo  $n$  un número entero. Que hacen que la diferencia de marcha sean múltiplos de longitudes de onda completos que causen que las



Diferencia de marcha	$R = \frac{2\pi}{\lambda} c h (\sigma_I - \sigma_{II})$
Extinción	$\alpha = n \frac{\pi}{2}$
	$\sigma_I - \sigma_{II} = \pi \frac{\lambda}{c h}$

FIG. 1.—Lo que ocurre en el polariscopio plano.



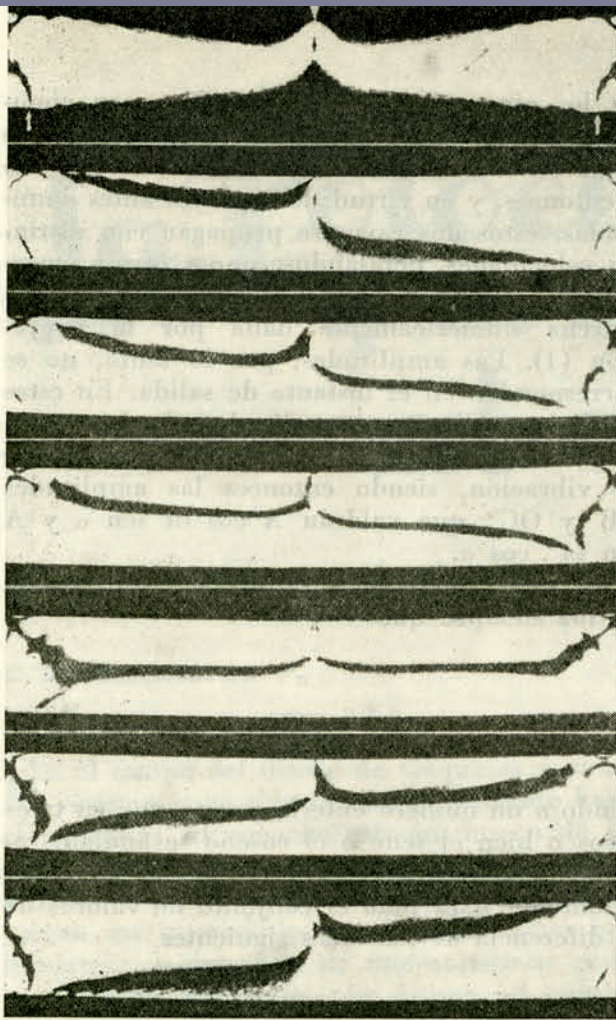


FIG. 2.—Isoclinas en una viga apoyada con una carga concentrada en el centro.

dos componentes en el plano de vibración estén en oposición, anulándose sus efectos.

De esta forma, mirando la placa de vidrio a través del analizador, aparecerán una serie de franjas de interferencia que corresponderán a los puntos que cumplen las condiciones (2) y (3).

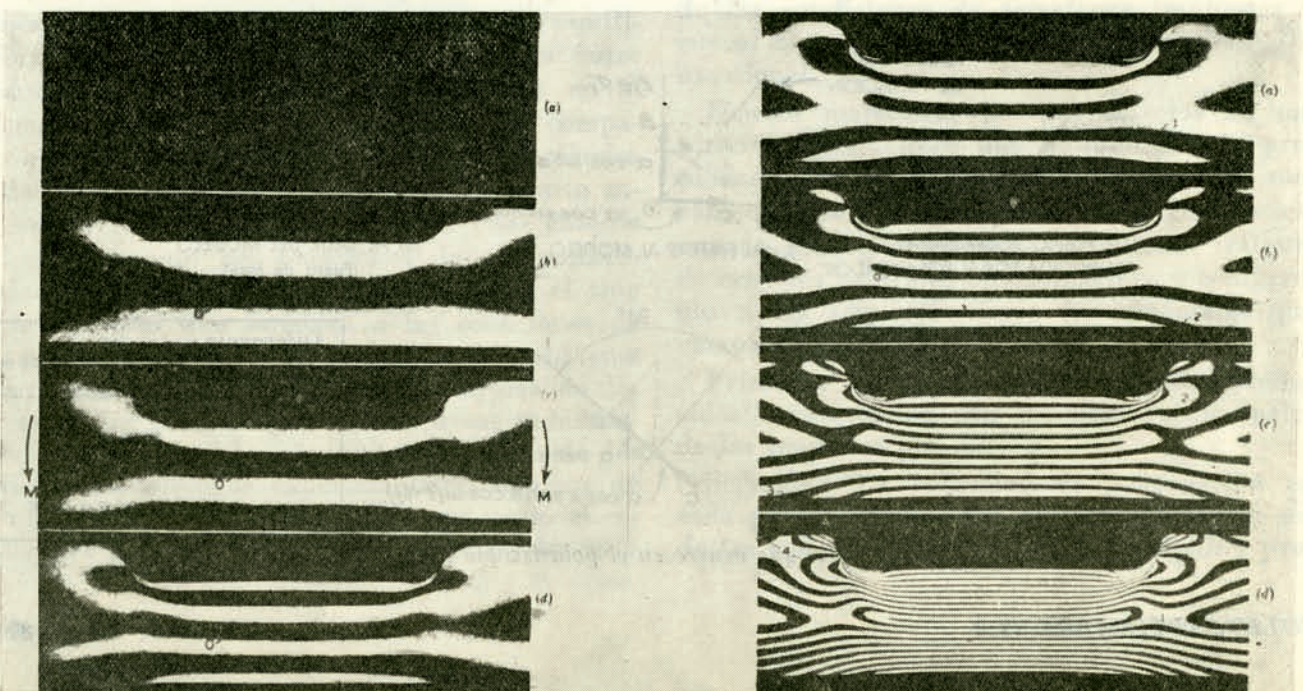
¿Cuándo ocurrirá el primer caso? Pues siempre que situemos los planos de vibración (los del polarizador y el del analizador) conjuntamente en la dirección de las tensiones principales, puesto que entonces el ángulo  $\alpha$  es  $0$ ,  $90$  ó múltiplo de  $90^\circ$ . Con lo que conseguiremos el primer resultado de la aplicación fotoelástica: Conocer la *dirección* de las tensiones principales en cada punto. En efecto, para cada posición de los planos cruzados de vibración del polarizador y analizador, obtendremos una franja de interferencia, que será el lugar geométrico de los puntos en los cuales la dirección de las tensiones principales forman un ángulo dado. Al conjunto de estas franjas se les llama en fotoelasticidad: isoclinas (fig. 2).

Ahora veamos el segundo punto. Si la diferencia de marcha que ha sido creada por la diferencia de tensiones principales según expresa la condición (1) es tal que enfrenta en oposición a las dos vibraciones, el efecto resultante será nulo y también lo será para el conjunto de valores que hacen este valor doble, triple, etcétera. Por tanto, obtendremos otra serie de franjas de interferencia que corresponderán a los lugares geométricos de los puntos cuyas diferencias de tensiones principales son constantes y para valores de estas dobles, triples, cuádruples, etc. A estas franjas se las llama isocromas (fig. 3).

Se puede objetar que ambas franjas de interferencia, isoclinas e isocromas se hallan mezcladas. En efecto; veamos ahora cómo discriminamos cuáles son unas y otras.

Existen varios procedimientos para evitar que ambas franjas aparezcan confundidas. Uno de ellos consiste en emplear dos materiales distintos para la determinación de unas y otras, por ejemplo, para isoclinas, se utiliza generalmen-

FIG. 3.—Isocromas en una viga sometida a flexión pura.





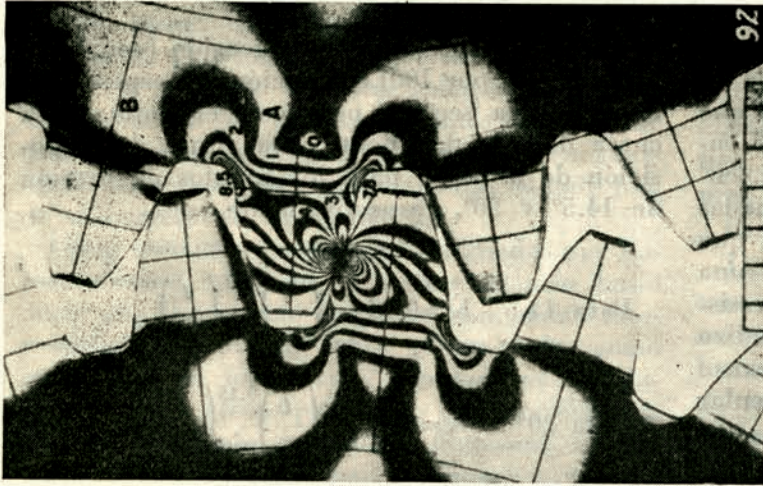


FIG. 4.—Isocromas en un diente de engranaje.

te vidrio o plexiglás, ya que las tensiones a que se les hace trabajar son inferiores a las necesarias para la aparición de la primera isocroma. Para isocromas se utiliza generalmente bakelita, celuloide o trolón, cuyo coeficiente fotoelástico es más elevado, pudiéndose dibujar las isocromas correspondientes por las franjas obtenidas en este modelo y sustrayendo las isoclinas obtenidas en el modelo de plexiglás.

El otro procedimiento consiste en trabajar en el polariscopio con luz polarizada circular, o sea con placas cuarto de onda intercaladas, con lo que se consigue eliminar las isoclinas, pues siempre se anula el seno o el coseno en la ecuación que se vió anteriormente.

Resumiendo todo el proceso, vemos que, en principio, se han de fabricar dos modelos cortados de planchas transparentes de plexiglás y bakelita, respectivamente. El primero, por su pequeña sensibilidad fotoelástica, nos servirá para determinación de isoclinas, y el segundo, examinado con polariscopio circular, nos proporcionará las isocromas. Hay que advertir que la mecanización de estos modelos precisa un cuidado especial, cuidado para no crear tensiones parásitas por calentamiento, y cuando a pesar de los cuidados empleados se produzcan, es necesario someterle a un ciclo especial de recocido.

El modelo de plexiglás colocado en el polariscopio plano y examinado con luz blanca, nos dará a conocer las isoclinas para cada posición de los ejes cruzados del polarizador y analizador, las cuales podrán ser recogidas en sucesivas fotografías y dibujadas sobre una pantalla en la cual se proyecten. De las isoclinas dibujadas es relativamente fácil pasar al dibujo completo de isostáticas. El otro modelo de bakelita es examinado en polariscopio circular, obteniendo las franjas isocromáticas que nos facilita la diferencia de tensiones. Previamente se hace una prueba de tarado para determinar el valor de franja en tensiones, o lo que es lo mismo, la

constante fotoelástica del material empleado, lo que se realiza cortando una probeta del mismo material y ensayándola a comprensión o a flexión pura. Ya tenemos, pues, los datos que nos proporciona la Fotoelasticidad: el conocimiento de la dirección de las tensiones principales y la diferencia entre ellas, en cada punto. No nos queda, pues, para la completa determinación del estado tensional, conocer la suma de tensiones, para con la suma y la diferencia, determinarlas por separado.

Existen varios procedimientos para hallar la suma de tensiones principales, cuya clasificación se sale de los límites de este trabajo, pero si citaremos algunos de ellos, tales como el método de Liebmann; un procedimiento numérico de integración de la ecuación de Laplace por diferencias finitas; el método de analogías eléctricas, en el que se produce el contorno en un material semiconductor al que se aplican potenciales proporcionales a la suma de tensiones en este contorno, dato este cuya determinación se extrae de las isocromas fotoelásticas, y midiendo las líneas equipotenciales en un electrolito encerrado en el contorno antedicho. Otros procedimientos que se emplean son el de interferencia, el de medida de espesores mediante interferómetros y el método de la película o pompa de jabón.

Esta es, en líneas generales, y según una visión elemental, el método que fundamenta el empleo de la Fotoelasticidad. Pasemos ahora a ver algunos problemas estudiados fotoelásticamente, y en los que se podrán comprobar la eficacia de su aplicación.

Existe un problema en diseño de máquinas cuya resolución reviste enorme importancia. Se trata del conocimiento de la distribución de tensiones en un diente de engranaje. La importancia del problema es evidente. El engranaje o la rueda dentada constituyen uno de los órganos de máquinas más empleados en la industria



y su número y a veces sus dimensiones justifican por demás un estudio concienzudo de su diseño. Por otra parte, de todos es conocido que la adopción del contorno de los dientes de engranaje bien sean en sus formas de cicloide, envolvente de círculo, etc., han sido determinadas más bien por consideraciones cinemáticas que resistentes. No obstante, tener el diente una forma que se aproxima al sólido de igual resistencia correspondiente a una pieza en voladizo con carga puntual en su extremo libre, no existe una ley matemática que nos permita calcular los esfuerzos que se producen en su interior. El problema es complejo, pues se trata de una carga concentrada cuyo punto de aplicación, dirección y magnitud es móvil y que además actúa sobre secciones transversales de canto variable. No hay más remedio que recurrir al estudio experimental si se quiere dimensionar un engranaje con seguridad y precisión. Se han hecho muchos estudios fotoelásticos de este caso, entre los que se pueden citar los realizados por Baud, Black, Dolan y otros. Cada uno aporta nuevos avances hacia la forma ideal del perfil del diente y, en general, se han determinado los factores de concentración de tensión y el radio óptimo de la curva que une al pie del diente con el núcleo de la rueda. Como detalle curioso señalaré que las tensiones determinadas en algunos dientes de perfil «standard» han sido hasta el 150 por 100 mayores que las determinadas al aplicar la fórmula de Lewis a estos dientes. En la fig. 4 pueden verse las isocromas obtenidas en un diente de perfil envolvente, y en la fig. 5 la red de isostáticas lograda, en la que se indica la isostática límite que coincide con la línea de rotura, como se ha comprobado en numerosos ensayos de resistencia.

La conclusión final de estos estudios puede resumirse en unas fórmulas empíricas que dan

el factor de concentración de tensión (con error inferior al 3 por 100) en función del espesor del diente en la sección peligrosa, el radio de la curva del pie del diente y la altura de la posición de la carga para los ángulos de presión de 14,5° y 20°, respectivamente.

$$\text{Para } 14,5^\circ \quad K = 0,22 + \left(\frac{t}{r_f}\right)^{0.2} \cdot \left(\frac{t}{h}\right)^{0.4}$$

$$\text{Para } 20^\circ \quad K = 0,18 + \left(\frac{t}{r_f}\right)^{0.15} \cdot \left(\frac{t}{h}\right)^{0.45}$$

Otro elemento cuya importancia en diseño de máquinas es manifiesto, es el caso de un tornillo fileteado (fig. 6). Los métodos estadísticos aplicados a un gran número de casos de rotura presentados en tornillos y uniones fileteadas han indicado que el 15 por 100 de las roturas se producen en la zona de encuentro del vástago con la cabeza seisavada, el 20 por 100 en el último filete de la rosca, y el 65 por 100 en la sección de aprieto de la tuerca. Naturalmente estas roturas han sido referidas siempre al caso de rotura frágil, sin intervenir esfuerzos dinámicos ni altas temperaturas. El análisis fotoelástico ha detectado en las zonas señaladas unas fuertes concentraciones de tensión, origen de las correspondientes roturas.

El análisis de las tensiones en la zona de empalme de cabeza y vástago y la que corresponde al último filete de la rosca son fácilmente abordables por fotoelasticidad plana, pero no sucede lo mismo con la sección correspondiente al plano de aprieto, la cual plantea un típico caso de Fotoelasticidad en tres dimensiones. Por otra parte, esta sección es la más interesante, puesto que, según hemos dicho, produce el mayor tan-

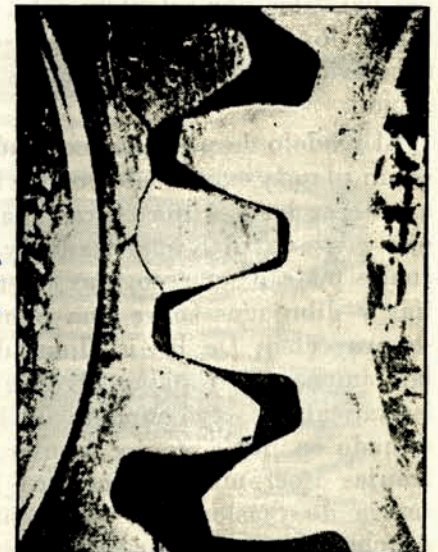
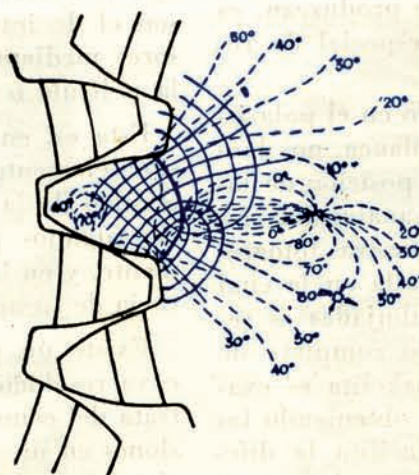


FIG. 5.—Isostáticas y rotura de un diente de engranaje.



to por ciento de roturas. El estudio ha sido abordado, empleando el método de «congelación» en bakelita y, como siempre, han sido determinados los correspondientes factores de concentración de tensión que «ponen en guardia» al diseñador de estos elementos cuando han de utilizarlos en sus proyectos.

Otros muchos ejemplos, ya estudiados por Fotoelasticidad, podrían presentarse, pero baste decir que del mismo modo se han hecho interesantísimos estudios sobre piezas, tales como enganches de ferrocarril, entalladuras y taladros en ejes, efecto producido por chaveteros y ranuras, tensiones de uniones fileteadas, estructuras hiperestáticas, piezas de aviones y en otros muchos órganos de máquinas de vital importancia en la Industria. También en Ingeniería Civil la aplicación de la Fotoelasticidad resulta de gran eficacia, y es fuente de grandes esperanzas para la resolución de problemas de importancia, tal como es el de dimensionamiento de presas y cimentaciones, problemas estos de gran complejidad por su carácter tridimensional y cuya resolución está a punto de ser logra-

da, con la aplicación del método de congelación aplicado a un material, que como la gelatina puede detectar por su bajo módulo de elasticidad y su elevada sensibilidad fotoelástica, incluso las fuerzas de masa producidas por peso propio, esfuerzos dinámicos y los debidos a fuerzas centrífugas.

La investigación sobre resolución de problemas de más envergadura sigue su curso, pero, no obstante, es digno de señalar que lo logrado hasta el presente supone una gran oportunidad de ser empleado especialmente en lo que respecta a diseño de máquinas. Es, desde luego, lamentable que la inercia que acompaña a toda innovación haya impedido la difusión del empleo de la Fotoelasticidad en la Industria de nuestro país. El autor tiene referencias de que en países extranjeros, y principalmente en Alemania y Estados Unidos, no solamente disponen las Universidades técnicas de instalaciones fotoelásticas, sino que incluso existen oficinas técnicas particulares que la emplean en la elaboración de sus proyectos industriales.

FIG. 6.—Tantos por ciento de roturas en un tornillo fileteado.

